Endomorphismes commutant avec les translations

On note $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie I

On considère une suites de réels deux à deux distincts : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note M_n la matrice carrée d'ordre $n+1$ dont l'élément d'indice (i,j) est a_{j-1}^{n-i+1}.

Autrement dit : $M_n = \begin{pmatrix} a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

On pose V_n son déterminant que nous allons calculer maintenant :

1. On introduit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{vmatrix} a_0^n & a_1^n & \cdots & a_{n-1}^n & x^n \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & x \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

1.a Justifier que f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

Exprimer le coefficient λ de x^n dans $f(x)$ à l'aide de l'un des termes de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.b Justifier que $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont racines de f.

1.c En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda \prod_{k=0}^{n-1} (x - a_k)$.

1.d Conclure : $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = \prod_{0\le i<j\le n} (a_i - a_j)$.

2. On considère $n+1$ nombres réels deux à deux distincts : $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et on considère la famille de polynômes : $\mathcal{C} = (P_k)_{0\le k\le n}$ où $P_k = (X + a_k)^n$.

2.a Former la matrice représentative de la famille $\mathcal{C}$ relative à la base $\mathcal{B}$.

2.b Etablir que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie II

On désigne par n un entier naturel non nul.

1. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on définit une application T_h en posant pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$: $T_h(P) = P(X + h)$.

1.a Justifier que T_h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1.b Quel en est le déterminant ?

On désire déterminer l'ensemble E formée des endomorphismes φ de $\mathbb{R}_n[X]$ satisfaisant la propriété : $\forall h \in \mathbb{R}, \varphi \circ T_h = T_h \circ \varphi$.

2. Montrer que E est une sous algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

3. On note D l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{R}_n[X]$ i.e. l'application $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $D : P \mapsto P'$.

3.a Etablir que $D \in E$.

3.b Justifier que $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}$, $D^k \in E$.

3.c Etablir que la famille $(D^k)_{0\le k\le n}$ est libre.

4. Soit $\theta : E \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\theta(\varphi) = \varphi(X^n)$.

4.a Montrer que θ est une application linéaire.

4.b Etablir que θ est injective.

4.c Déterminer la dimension de E.

5. Donner une base de E.